

FORMELSAMMLUNG v03 Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie

Alle Formeln ohne Gewähr auf Korrektheit

1) Wahrscheinlichkeitsbegriff und Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

Relative Häufigkeit

$$r_N(A) = \frac{h_N(A)}{N} = \frac{\text{Abs. Häufigkeit}}{\text{Anz. Versuche}}$$

~~Es Existiert kein Grenzwert:~~

~~$$P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} r_N(A)$$~~

Wahrscheinlichkeit nach Kolmogorov:

KI: $P(A) \geq 0$

KII: $P(\Omega) = 1$

KIII: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
für $A \cap B = \emptyset$

Laplace-Experiment:

LI: $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ Endliches Ω

LII: $P(\omega_1) = \dots = P(\omega_m)$

LIII: $P(A) = \frac{\text{Anz. günstigten Fälle}}{\text{Anz. der möglichen Fälle}}$

KIII: für Paarweise disjunkte Ereignisse

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Gegenereignis:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Erweiterung von **KIII** :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

für $A \cap B \neq \emptyset$

Weitere Eigenschaften der Wahrscheinlichkeit:

$$P(A) \leq 1$$

$$P(\emptyset) = 0$$

$$P(A) \leq P(B) \text{ für } A \subset B (A \text{ zieht } B \text{ nach sich)}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Multiplikationssatz:

$$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B) = P(B/A) \cdot P(A)$$

Satz der vollständigen Wahrscheinlichkeit

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B/A_i) \cdot P(A_i)$$

Satz von Bayes:

$$P(A_k/B) = \frac{P(B/A_k) \cdot P(A_k)}{\sum_{i=1}^n P(B/A_i) \cdot P(A_i)}$$

2) Stochastisch unabhängige Ereignisse

Bedingungen zu Stochastischen

Unabhängigkeit

$$P(A/B) = P(A/\bar{B})$$

$$P(A) = P(A/B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Merke:

Ist A unabhängig von B so ist auch B unabhängig von A

3) Disjunkt vs. Stochastisch unabhängig ?

	<i>A,B Disjunkt</i>	<i>A,B Stochastisch unab.</i>	<i>Gilt immer !</i>
$P(A \cup B)$	$P(A) + P(B)$	$P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$	$P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$P(A \cap B)$	$\emptyset$	$P(A) \cdot P(B)$	$\frac{P(A B) \cdot P(B)}{P(B A) \cdot P(A)}$

Merke:

- Sich nachziehende Ereignisse sind **nicht disjunkt** und **immer stochastisch abhängig**
- **Disjunkte** Ereignisse sind **immer stochastisch abhängig**

Vollständig Stochastisch unabhängig:

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$$

4) Verbundexperimente

Merkmalsmenge eines VE:

$$\Omega_V = \Omega_1 \times \Omega_2$$

Binomialwahrscheinlichkeitsverteilung:

$$P_{n,k} = \binom{n}{k} \cdot P(A)^k \cdot (1 - P(A))^{n-k}$$

Summe aller Werte:

$$\sum_{k=0}^n P_{n,k} = 1$$

HIER KÖNNTE
IHRE
WERBUNG STEHEN

5) Zufallsvariablen – Verteilungs- und Dichtefunktion

Definition der Zufallsvariablen:

Zufallsvariable $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$P(X = -\infty) = 0$$

$$P(X = \infty) = 0$$

Eine Zufallsvariable heist:

diskret - wenn es **endlich / abzählbar**
unendlich viele Elemente gibt

stetig - wenn es **überabzählbar unendlich**
viele Elemente gibt

Definition der Verteilungsfunktion:

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

(die Verteilungsfunktion ist monoton steigend)

Weitere Eigenschaften der Verteilungsfunktion:

$$F_X(-\infty) = 0, \quad F_X(\infty) = 1$$

$$P(X > x) = 1 - F_X(x)$$

$$P(x_1 < X \leq x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$$

Definition der Dichtefunktion:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

Analog:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(y) dy$$

Eigenschaften der Dichtefunktion:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$$

Weitere Eigenschaften der Dichtefunktion:

$f(x) \geq 0$ da $F(x)$ monoton steigend.

$$f(-\infty) = 0, \quad f(\infty) = 0$$

6) Momente – Erwartungswert und Standardabweichung

Erwartungswert bei diskreter ZV

$$E(X) = \mu_X = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X=x_i)$$

Erwartungswert bei stetiger ZV

$$E(X) = \mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx$$

Zusammenhang von E und F

$$E(X) = \mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} [1 - F_X(x) - F_X(-x)] dx$$

Varianz:

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 \cdot f_X(x) dx$$

Standardabweichung:

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$$

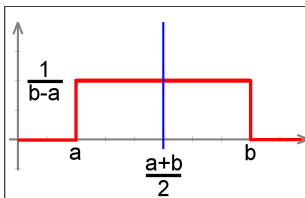
Zusammenhang zwischen Varianz und μ_X :

$$\sigma_X^2 = E(x^2) - \mu_X^2$$

7) Spezielle Verteilungen:

Stetige Gleichverteilung:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

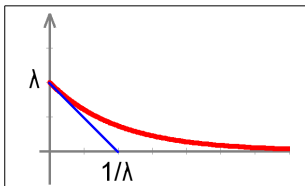


$$\mu_X = \frac{a+b}{2}$$

$$\sigma_X^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Exponentialverteilung:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & \text{für } x \geq 0 \text{ mit } \lambda > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

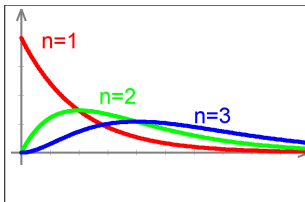


$$\mu_X = \frac{1}{\lambda}$$

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Erlangverteilung:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda \cdot e^{-\lambda x}}{(n-1)!} \cdot (\lambda x)^{n-1} & \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

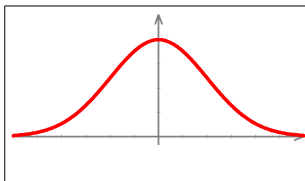


$$\mu_X = \frac{1}{\lambda}$$

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Standardnormalverteilung:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

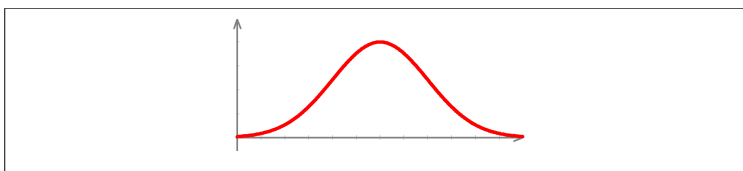


$$\mu_X = 0$$

$$\sigma_X^2 = 1$$

Standardnormalverteilung:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{(x - \mu_X)^2}{2 \sigma_X^2}}$$



Transformation

$$G = \sigma_G \cdot x + \mu_G$$

8) Spezielle Verteilungen:

Definition Verbundverteilungsfunktion:

$$F_{XY}(x, y) = P(X \leq x \cap Y \leq y)$$

Kurzschreibweise:

$$F_{XY}(x, y) = (X \leq x, Y \leq y)$$

Eigenschaften der Verbundverteilungsfunktion:

$$F_{XY}(-\infty, y) = 0$$

$$F_{XY}(x, -\infty) = 0$$

$$F_{XY}(\infty, \infty) = 1$$

Definition Verbunddichtefunktion:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x, y)}{\partial x \partial y}$$

Analog:

$$F_{XY}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{XY}(\mu, \nu) d\mu d\nu$$

Eigenschaften der Verbunddichtefunktion:

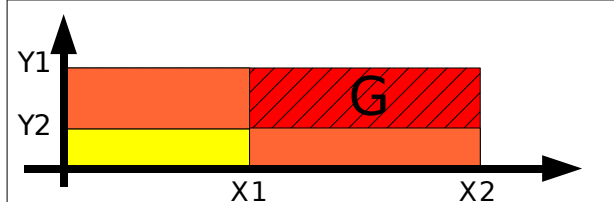
$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx dy = 1$$

$$f_{XY}(x, y) \geq 0$$

Gebietsintegral:

$$P(x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f_{XY}(x, y) dx dy$$



$$\begin{aligned} P(x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2) &= P(X \leq x_2, Y \leq y_2) - P(X \leq x_1, Y \leq y_2) - (X \leq x_2, Y \leq y_1) + P(X \leq x_1, Y \leq y_1) \\ &= F_{XY}(x_2, y_2) - F_{XY}(x_1, y_2) - F_{XY}(x_2, y_1) + F_{XY}(x_1, y_1) \end{aligned}$$

Randverteilung:

$$F_{XY}(x, \infty) = P(X \leq x, Y \leq \infty) = P(X \leq x) = F_X(x)$$

$$F_{XY}(\infty, y) = P(X \leq \infty, Y \leq y) = P(Y \leq y) = F_Y(y)$$

Randdichtefunktion:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx$$

Falls X und Y stochastisch unabhängig:

$$F_{XY}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

Zweidimensionaler Dirac Impuls:

$$\delta(x, y) = \delta(x) \cdot \delta(y)$$

9) Momente – Erwartungswert und Standardabweichung bei zweidimensionaler ZV

Transformation:

$$Z = h(X, Y)$$

Erwartungswert:

$$E(Z) = \mu_Z = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) \cdot f_{XY}(x, y) dx dy$$

Transformation Summe zweier ZV:

$$Z = h(X, Y) = X + Y$$

$$\rightarrow E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

Allgemein:

$$Z = h(X_1, X_2, \dots, X_n) = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

$$\rightarrow E(X_1, X_2, \dots, X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$$

Transformation Produkt zweier ZV:

$$Z = h(X, Y) = X \cdot Y$$

Für Stochastisch unabhängig gilt:

$$\rightarrow E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$$

Covarianz:

$$C_{XY} = E(XY) - \mu_X \cdot \mu_Y$$

Vgl Varianz:

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - \mu_X^2$$

Die Dichtefunktion der Summe zweier stochastisch unabhängiger ZV ist die Faltung:

$$f_Z(z) = f_X(z) * f_Y(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-\tau) \cdot f_Y(\tau) d\tau$$

10) Mathematische Statistik

Stichprobenmittelwert:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n X_i \quad \bar{X} \neq \mu_X$$

Stichprobenvarianz:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad S^2 \neq \sigma_X^2$$

Stichprobenmittelwert:

$$S_{XY} = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$$

Stichprobenkorrelationskoeffizient:

$$R_{XY} = \frac{S_{XY}}{\sqrt{S_X^2 \cdot S_Y^2}}$$

Definition „Der Wahre Parameter“:

Wahrer Parameter: ϑ Schätzwert: $\hat{\vartheta}$

Schätzer:

$$\hat{\Theta}_n = g_n(X_1, X_2, \dots, X_n) = g_n(\tilde{X})$$

Ein Schätzer $\hat{\Theta}_n$ heisst erwartungstreu falls gilt:

$$E(\hat{\Theta}_n) = \vartheta$$

Eine Folge $\hat{\Theta}_n, \hat{\Theta}_{n+1}$ heisst asymptotisch erwartungstreu wenn gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\Theta}) = \vartheta$$

Beispiel an Erlangverteilung

$$\begin{aligned} \mu_X &= \frac{n}{\lambda} \rightarrow \hat{\mu}_X = \frac{\hat{n}}{\hat{\lambda}} = \bar{x} \\ \sigma_X^2 &= \frac{n}{\lambda^2} \rightarrow \hat{\sigma}_X^2 = \frac{\hat{n}}{\hat{\lambda}^2} = s^2 \\ &\rightarrow \hat{n} = \hat{\lambda} \cdot \bar{x} \quad \text{und} \quad \hat{n} = \hat{\lambda}^2 \cdot s^2 \end{aligned}$$

Einsetzen:

$$\hat{\lambda} \cdot \bar{x} = \hat{\lambda}^2 \cdot s^2$$

$$\bar{x} = \hat{\lambda} \cdot s^2$$

$$\hat{\lambda} = \frac{\bar{x}}{s^2} \rightarrow \hat{n} = \bar{x}^2 \cdot s^2$$