

FORMELSAMMLUNG (V.4)

Alle Formeln ohne Gewähr auf Korrektheit

Grundlagen der Informationsübertragung

1) Energiesignal , Leistungssignal , Leitungscodierung

Mathematisches Energiesignal:

$$0 < E = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t) dt < \infty$$

Mathematisches Leistungssignal:

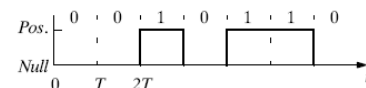
$$0 < P = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{2\theta} \int_{-\theta}^{+\theta} s^2(t) dt < \infty$$

Einteilung nach Signalart:

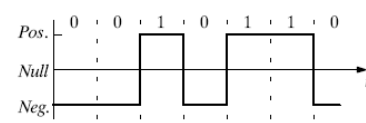
	E-sig	L-Sig	WN
Rechteckimpuls	X		
1 / x	X		
Sinus Zeitlich begrenzt	X		
Dirac-Impuls		X	
Sinus Funktion		X	
Gleichsignal		X	
Zeitdiskretes Signal			X
Exponentialfunktion			X

Zeitfunktion

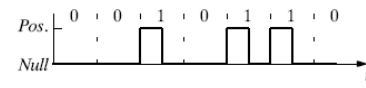
Bezeichnung



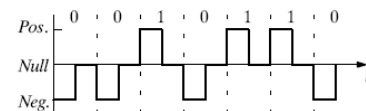
Unipolar
NRZ
Einfachstrom



Bipolar
NRZ
Doppelstrom



Unipolar
RZ



Bipolar
RZ

Beschreibung von Digitalsignalen:

$$s(t) = \sum_v a_v \cdot g(t - v \cdot T)$$

binär unipolar

$$a_v \in \{0, 1\}$$

binär bipolar

$$a_v \in \{-1, 1\}$$

quaternär bipolar

$$a_v \in \{-3, -1, 1, 3\}$$

Symbolrate:

$$v_s = \frac{1}{T_{min}} \text{ Baud}$$

Bitrate:

$$v = v_s \cdot \log_2(M)$$

M-äres Sig -> k-stelliges Codewort:

$$k = \log_2(M) \text{ mit } \log_2(M) = \frac{\log(M)}{\log(2)}$$

Redundanz:

Gruppiert:

$$R = \frac{M_m - M_z}{M_m}$$

$$R = \frac{M^N - 2^k}{M^N}$$

Mm Anz. möglichen
Mz Anz. zugelassenen

N: Anzahl der
Gruppierungselemente

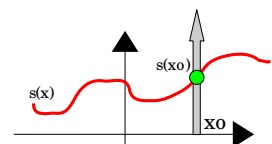
Dirac Impuls (Delta-Distribution):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(x) \cdot \delta(x - x_0) dx$$

$$= s(x_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) dx = s(x_0)$$

Da gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) dx = 1$$



Energie und Leistung Komplexer Signale:

$$E = \Re(E) + \Im(E)$$

$$P = \Re(P) + \Im(P)$$

2) Zeitkontinuierliche Übertragungssysteme

Lineares System:

Wenn: $x_1(t) \xrightarrow{\Phi} y_1(t) \quad \wedge \quad x_2(t) \xrightarrow{\Phi} y_2(t)$

Dann: $a \cdot x_1(t) + x_2(t) \xrightarrow{\Phi} a \cdot y_1(t) + y_2(t)$

Zeitinvariantes System: (Zeitunabhängig)

Wenn: $x_1(t) \xrightarrow{\Phi} y_1(t)$

Dann: $x_1(t+\tau) \xrightarrow{\Phi} y_1(t+\tau)$

3) Faltung

Definition des Faltungsintegrals:

$$s_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau$$

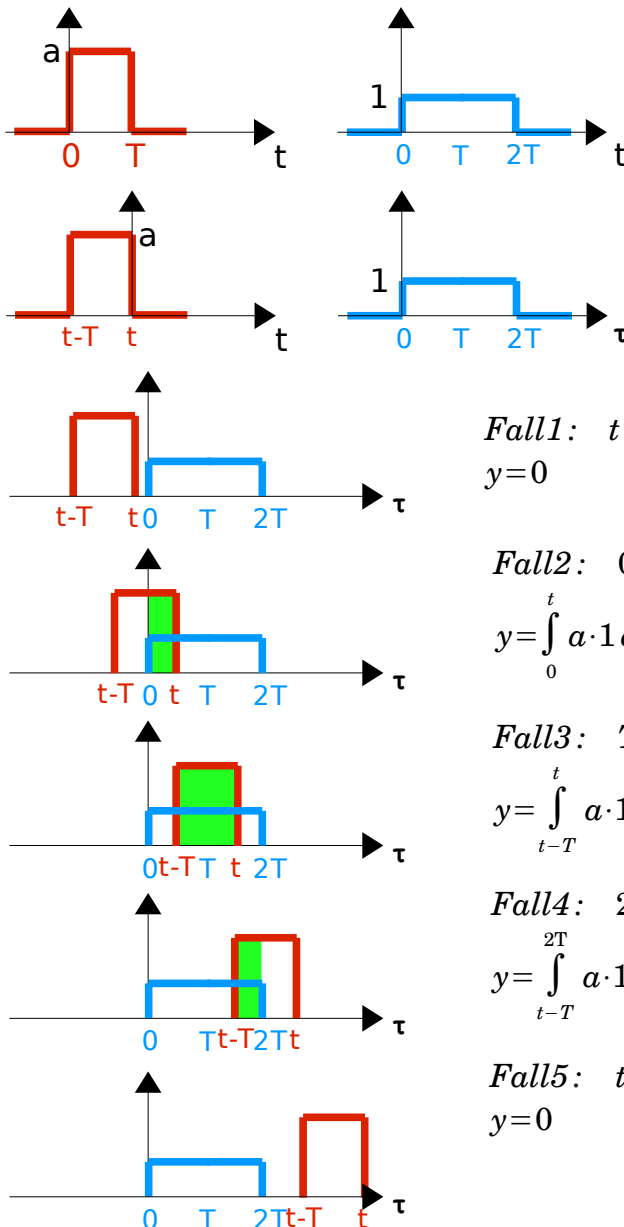
Abkürzende Schreibweise:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau = s_1(t) * h(t)$$

Einfaches Beispiel zur Faltung:

Anmerkung:

$$s_2(t) = \mathcal{F}^{-1}\{S_1(f) \cdot H(f)\}$$



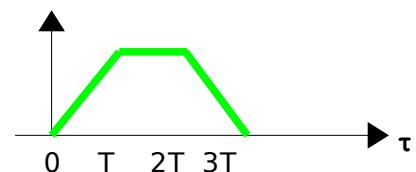
Fall1: $t \leq 0$
 $y=0$

Fall2: $0 \leq t \leq T$
 $y = \int_0^t a \cdot 1 d\tau = at$

Fall3: $T \leq t \leq 2T$
 $y = \int_{t-T}^t a \cdot 1 d\tau = a \cdot (t - t + T) = a \cdot T$

Fall4: $2T \leq t \leq 3T$
 $y = \int_{t-2T}^{2T} a \cdot 1 d\tau = a \cdot (2T - t + T) = a \cdot (-t + 3T)$

Fall5: $t \geq 3T$
 $y=0$



4) Korrelation

Energie bei Überlagerung zweier reeller Signale:

$$E_S = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) + y(t)]^2 dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt}_{E_X} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} y^2(t) dt}_{E_Y} + 2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot y(t) dt}_{E_{XY}}$$

Die Kreuzenergie:

$$E_{XY} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot y(t) dt = \varrho \cdot \sqrt{E_X \cdot E_Y}$$

Der Korrelationsfaktor:

$$\varrho = \frac{E_{XY}}{\sqrt{E_X \cdot E_Y}} \quad -1 \leq \varrho \leq 1$$

Für Energiesignale gilt:

$$\begin{aligned} \varrho > 0 & \quad \text{kovariant} \\ \varrho < 0 & \quad \text{kontravariant} \end{aligned}$$

Für Energiesignale gilt weiterhin:

$$\begin{aligned} \varrho = 0 & \quad \text{unkorreliert, orthogonal} \\ & \quad \text{d.h. maximal unähnlich} \\ \varrho = 1 & \quad \text{maximal korreliert (gleichläufig)} \\ \varrho = -1 & \quad \text{maximal antikorreliert (gegenläufig)} \end{aligned}$$

Leistung bei Überlagerung zweier reeller Signale:

$$E_S = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{2\theta} \int_{-\theta}^{\theta} [x(t) + y(t)]^2 dt = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{1}{2\theta} \int_{-\theta}^{\theta} x^2(t) dt}_{P_X} + \lim_{\theta \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{1}{2\theta} \int_{-\theta}^{\theta} y^2(t) dt}_{P_Y} + 2 \cdot \lim_{\theta \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{1}{2\theta} \int_{-\theta}^{\theta} x(t) \cdot y(t) dt}_{P_{XY}}$$

Der Kreuzleistungsfaktor:

$$\bar{\varrho} = \frac{P_{XY}}{\sqrt{P_X \cdot P_Y}} \quad -1 \leq \bar{\varrho} \leq 1$$

Gleichanteil :

$$\overline{s(t)} = \mu_s = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{2\theta} \int_{-\theta}^{\theta} s(t) dt$$

Wechselanteil:

$$\begin{aligned} s_w(t) &= s(t) - \overline{s(t)} = s(t) - \mu_s \\ \overline{s_w(t)} &= 0 \quad \text{Mittelwert der Wechselkomponente ist 0} \end{aligned}$$

Mittlere Leistung der Wechselkomponente :

$$\overline{s_w^2(t)} = \sigma_s^2 = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{2\theta} \int_{-\theta}^{\theta} s_w^2(t) dt$$

Gesamtleistung:

$$P_s = \mu_s^2 + \sigma_s^2$$

Sonderfall: Bei Leistungssignalen ohne

Gleichkomponente $\mu = 0$ ist der
Kreuzleistungsfaktor der Korrelationsfaktor
 $\bar{\varrho} = \varrho$ (Orthogonal = Unkorreliert)

Weitere Ergänzungen siehe Script

Leistung bei Überlagerung zweier komplexer Signale:

$$E_S = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |\underline{x}(t)|^2 dt}_{E_X} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |\underline{y}(t)|^2 dt}_{E_Y} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \underline{x}(t) \cdot \underline{y}^*(t) dt}_{E_{XY}} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \underline{y}(t) \cdot \underline{x}^*(t) dt}_{E_{YX}^* = E_{XY}}$$

5) Darstellung von Signalen mit Elementarfunktionen

Approximation eines Signals allgemein:

$$\tilde{s}(t) = \sum_k c_k \cdot \Psi_k(t)$$

durch die gewichtete Summe c_k von Elementarfunktionen $\Psi_k(t)$

Approximation durch Rechteckfunktionen

$$\tilde{s}(t) = \sum_k c_k \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{T} - k\right)$$

mit Koeffizienten:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{T} - k\right) dt$$

Herleitung durch Flächengleichheit (s. Skript)

Orthogonalität der Elementarfunktionen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_\nu(t) \cdot \Psi_\mu(t) dt = \begin{cases} T & \text{für } \mu = \nu \\ 0 & \text{für } \mu \neq \nu \end{cases}$$

Bildung der Koeffizienten Allgemein:

$$c_k = \frac{1}{E} \int_{I_u}^{I_o} s(t) \cdot \Psi_k^*(t) dt$$

Fourier-Reihe:

$$\Psi_k(t) = e^{j k 2\pi f_0 t} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$s(t) \approx \tilde{s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{j k 2\pi f_0 t}$$

$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} s(t) \cdot e^{-j k 2\pi f_0 t} dt$$

$$T_p = \frac{1}{f_0}$$

Eigenschaften:

$$s(t) = s(-t) \quad (\text{Gerade}) \rightarrow c_k = c_{-k}$$

$$s(t) = -s(-t) \quad (\text{Ungerade}) \rightarrow c_k = -c_{-k}$$

Fourier-Transformation:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \cdot e^{j 2\pi f t} df$$

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-j 2\pi f t} dt$$

Zusammenhang mit Fourier-Reihe:

$$c_k = \frac{1}{T_p} \cdot S(k \cdot f_0)$$

Eigenschaften:

$$s(t) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow S(f) = S^*(-f) \in \mathbb{C}$$

$$s(t) \in \mathbb{R} \text{ mit } s(t) = s(-t) \quad (\text{Gerade}) \rightarrow \Im\{S(f)\} = 0$$

$$s(t) \in \mathbb{R} \text{ mit } s(t) = -s(-t) \quad (\text{Ungerade}) \rightarrow \Re\{S(f)\} = 0$$

Regeln:

$$s(t) \leftrightarrow S(f)$$

$$a \cdot s(t) \leftrightarrow a \cdot S(f)$$

$$s(t - t_0) \leftrightarrow S(f) \cdot e^{-j 2\pi f \cdot t_0}$$

$$s(t) \cdot e^{-j 2\pi f_0 t} \leftrightarrow S(f - f_0)$$

$$s(b \cdot t) \leftrightarrow \frac{1}{|b|} \cdot S\left(\frac{f}{b}\right)$$

Diskrete Faltung:*Im Zeitbereich:*

$$\{s_2(n)\} = \left\{ \sum_{v=-\infty}^{\infty} s_1(v) \cdot h(n-v) \right\} =$$

$$\left\{ \sum_{v=-\infty}^{\infty} h(v) \cdot s_1(n-v) \right\}$$

$$L_2 = L_1 + L_h$$

Im Frequenzbereich:

$$\{S_2(k)\} = \{S_1(k) \cdot H(k)\}$$

$$N \geq L_2 + 1 = L_1 + L_h + 1$$

Diskrete Fouriertransformation:

$$S(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{k \cdot n}{N}}$$

$$s(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S(k) \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot k / N}$$

 $N \geq$ Anzahl der Elemente**Rekursive berechnung von $h(n)$**

$$s_2(n) = \sum_{v=0}^n s_1(v) \cdot h(n-v)$$

$$= S_1(0) \cdot h(n) + \sum_{v=1}^n s_1(v) \cdot h(n-v)$$

$$\rightarrow h(n) = \frac{1}{S_1(0)} \left\{ s_2(n) - \sum_{v=1}^n s_1(v) \cdot h(n-v) \right\}$$