

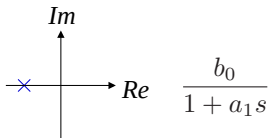
Digitale Filter

Matthias Jung

29. September 2010

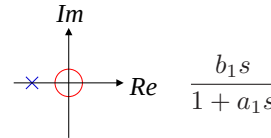
1 Analoge Filter / Analoge Transformationen / Analog zu Digital

Tiefpass:



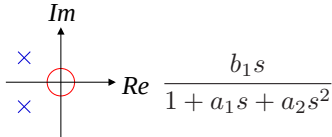
Keine Nullstelle bei $s = 0 \rightarrow$ tiefe Freq. werden durchgelassen, Hohe Freq. werden gedämpft $n > m$

Hochpass:



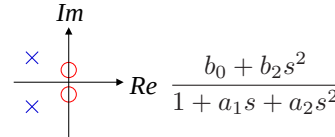
Nullstelle bei $s = 0 \rightarrow$ tiefe Freq. werden gesperrt, Hohe Freq. werden durchgelassen $n = m$

Bandpass:



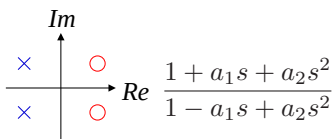
Entsteht aus einem Tiefpass durch Frequenzverschiebung $n > m$

Bandsperr:



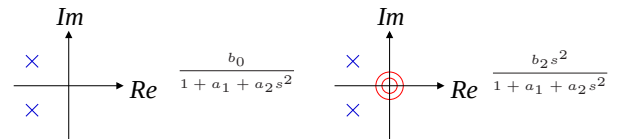
Gegenteil von Bandpass, $n = m$

Allpass:



Betragsfrequenzgang = const. Phase $\neq$ const. P. und N. sind an I-Achse gespiegelt $n = m$

Tiefpass / Hochpass 2er Ordnung:



Dezibel:

P_1/P_2	x_1/x_2	dB
=10000	=100	40 dB
=100	=10	20 dB
=10	$\approx 3,16$	10 dB
≈ 4	≈ 2	6 dB
≈ 2	$\approx 1,41$	3 dB
$\approx 1,26$	$\approx 1,12$	1 dB
=1	=1	0 dB
$\approx 0,79$	$\approx 0,89$	-1 dB
$\approx 0,5$	$\approx 0,71$	-3 dB
$\approx 0,25$	$\approx 0,5$	-6 dB
=0,1	$\approx 0,32$	-10 dB
=0,01	=0,1	-20 dB
=0,0001	=0,01	-40 dB

Betragsfrequenzgang:

$$|H(s)| = \sqrt{M^2(j\omega)} = \sqrt{M(s) \cdot M(-s)}$$

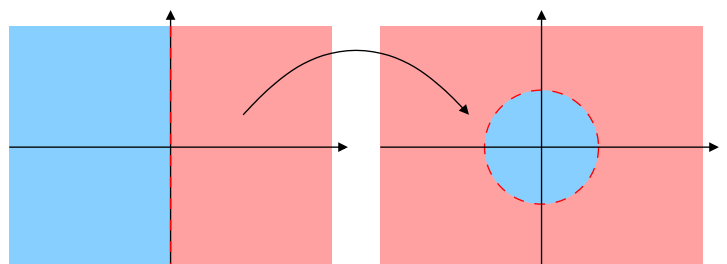
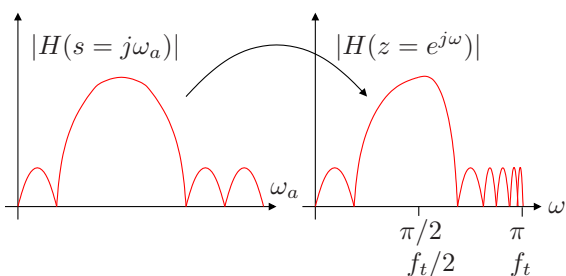
Bilinear Transformation:

$$H(z) = H\left(s = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1}\right)$$

Frequenzverzerrung:

$$\omega = \frac{2}{T} \cdot \tan\left(\omega_a \cdot \frac{T}{2}\right)$$

Beispiel Bilineartransformation:



TP-TP-Transformation:

$$s \rightarrow \frac{s}{\omega_{ao}}$$

TP-HP-Transformation:

$$s \rightarrow \frac{1}{s}$$

TP-BP-Transformation:

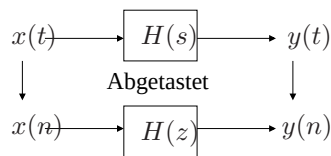
$$s \rightarrow \frac{s^2 + \omega_{ao}^2}{s}$$

TP-HP-Transformation:

$$s \rightarrow \frac{s}{s^2 + \omega_{ao}^2}$$

Signalinvariante Digitalisierung:

Wir digitalisieren das Analogfilter so, dass die Antwort auf ein diskretes Bezugssignal der abgetasteten Antwort des Analogfilters auf das kontinuierliche Bezugssignal entspricht.

**Vorgehen:**

1. Gegeben $H(s)$ und $x(t)$
2. Ermittle $x(n) = x(t = n \cdot T_a)$ und $X(z) = Z\{x(t)\}$
3. Ermittle $X(s)$
4. Ermittle $y(t) = L^{-1}\{H(s) \cdot X(s)\}$
5. Ermittle $y(n) = y(t = n \cdot T_a)$ und $Y(z) = Z\{y(t)\}$
6. $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$

2 Direktentwurf digitaler Filter:

2.1 Fouriermethode:

Filterlänge N gerade:

$$h_D(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H_D(\omega) \cdot e^{j\omega n} d\omega$$

Kausal machen:

$$h(n) = h_D\left(n - \frac{N-1}{2}\right) \quad n = 0, \dots, N$$

Gegebenen Falls Unstetigkeiten in $h(n)$ beachten!

Filterlänge N ungerade: (Resampling)

$$h_D(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H_D(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

Kausal machen und neu Abtasten (Resampling):

$$h(n) = h_D\left(T \cdot \left[n - \frac{N-1}{2}\right]\right) \quad n = 0, \dots, N$$

Gegebenen Falls Unstetigkeiten in $h(n)$ beachten!

2.2 Direktentwurf IIR Filter / Spectral Modeling / Prony Verfahren

Sollimpulsantwort: $d = \{d_0, d_1, d_2, \dots\}$
Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{N_b-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 & 0 & \dots \\ d_1 & d_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \\ d_{N_b+N_a-2} & d_{N_b+N_a-3} & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ b_{N_a-1} \end{pmatrix}$$

$$\dim(b^*) = N_b$$

$$\dim(b^*) = N_a - 1$$

$$\dim(D) = (N_b + N_a - 1) \times N_a$$

$$\dim(d_1) = (N_a - 1) \times 1$$

$$\dim(D_2) = (N_a - 1) \times (N_a - 1)$$

$$\dim(D_2) = N_a \times N_b$$

Enwurfsproblem:

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{n=0}^{N_b-1} b_n \cdot z^{-n}}{\sum_{n=0}^{N_a-1} a_n \cdot z^{-n}} \stackrel{!}{=} D(z)$$

Direkter Fehler:

$$E_D(z) = H(z) - D(z)$$

Indirekter Fehler:

$$E_D(z) = B(z) - D(z) \cdot A(z)$$

Interpolationsproblem $N = M$:

$$\begin{pmatrix} b^* \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ d_1 \mid D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a^* \end{pmatrix}$$

Lösungen:

I: $0 = d_1 + D_2 \cdot a^* \rightarrow a^* = -D_2^{-1} \cdot d_1$

II: $b^* = D_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a^* \end{pmatrix}$

Approximationsproblem $M > N$ $\|e\|_2$:

$$e = \begin{pmatrix} b^* \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} D_1 \\ d_1 \mid D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a^* \end{pmatrix}$$

Lösungen mittels Pseude Inversen:

I: $a^* = -D_2^\# \cdot d_1 = -(D_2^T \cdot D_2)^{-1} \cdot D_2^T \cdot d_1$

II: $b^* = D_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a^* \end{pmatrix}$

2.3 Approximationsprobleme und Optimierung:

Minimaler quadratischen Fehler: (L_2)

Unrestringiert:

$$c = D^\# f$$

Beschränkt:

Minimiere: $\|e\|_2^2 = e^T \cdot e \rightarrow -2c^T D^T f + c^T D^T D c$
u.d.B: $|Dc - f| \leq \rho_0$

Minimaler Gleichmäßiger Fehler:

(L_∞ , Tchebychef, MinMax)

$$\rho = \max_{m=0}^{M-1} |e(m)|$$

Minimiere: ρ
u.d.B: $|Dc - f| \leq \rho$

Minimaler Absolutehler: (L_1)

$$r = (\rho_0, \rho_1, \rho_3, \dots)$$

Minimiere: $\sum_{m=0}^{M-1} \rho_m$
u.d.B: $|Dc - f| \leq r$

Weitere Beschränkungen:

Ungleichung:

$$|Dc - f| \leq \rho_0$$

Punkt:

$$D_{new} - f = \rho_0$$